Primitiva de una función

¿Qué es la primitiva de una función?

La **primitiva de una función** es la función a partir de la cual procede una función derivada.
Una función f'(x) se obtiene derivando una función F(x), como por ejemplo:

$$F(x)=3x^2 \longrightarrow f'(x)=6x$$

Entonces, diremos que **F(x) es primitiva de f'(x)** y para pasar de F(x) a f'(x), hay que derivar f'(x).
¿Qué pasa si tenemos directamente f'(x) y queremos encontrar su primitiva F(x)?

Es decir, queremos encontrar la función de la cual procede esa función derivada.

Un ejemplo podría ser éste, en el que partimos de la función derivada y llegamos a su primitiva:

$$f'(x)=3x^2 \longrightarrow F(x)=x^3$$

Hemos encontrado una función (x^3) que si la derivamos, volvemos a la función f'(x). Es la **primitiva de la función**.

Ahora bien, las siguientes funciones, también son primitivas de la función f'(x) anterior, ya que si las derivamos, obtenemos exactamente a la misma función f'(x):

$$F(x)=x^3+14$$

$$F(x)=x^3-2$$

Lo único que diferencia a estas primitivas es el número que se le añade al final. A ese número le vamos a llamar **constante** y esta constante puede tomar **cualquier valor**, por lo que una función tiene infinitas primitivas.

El conjunto de todas las primitivas es la **integral indefinida** y se escribe de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

- Se lee : integral de f de x diferencial de x.
- $\int$ es el signo de integración.
- $f(x)$ es el integrando o función a integrar.
- dx es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.
- C es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces: $\int f(x)dx = F(x) + C$
- Para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar.

En el caso del ejemplo anterior sería:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Al añadirle la constante a la primitiva, estamos englobando todas las primitivas posibles de la función.

A ese proceso contrario a la derivación es el que se conoce como **integración**.

Propiedades de las integrales indefinidas

Vamos a ver ahora qué propiedades tienen las integrales indefinidas, las cuales las utilizaremos simplificar los cálculos a la hora de resolver cualquier tipo de integral.

Propiedad 1

Si tenemos una constante que está multiplicando a una función, podemos sacar la constante fuera de la integral:

$$\int a.f(x)\,dx = a\int f(x)dx$$

Ejemplo: $\int 3xdx = 3\int xdx = 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 3\frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 + C$

Propiedad 2

La integral de la suma o resta de 2 o más funciones es igual a la suma o resta de sus integrales:

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Ejemplo:

- $\int (x^2 + senx)dx = \int x^2\,dx + \int senx\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} - cosx + C =$
  $= \frac{x^3}{3} - cosx + C$
- $\int (e^x - cosx)dx = \int e^x dx - \int cosx\,dx = e^x - senx + C$

Mucho cuidado con esta propiedad porque no es extensible para las integrales que tienen multiplicación o división de funciones.

La integral de la multiplicación de dos funciones **no es igual** a la multiplicación de sus integrales:

$$\int f(x).g(x)dx \neq \int f(x)dx \,.\int g(x)dx$$

De la misma forma, la integral de la división de dos funciones **no es igual** a la división de las integrales:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$