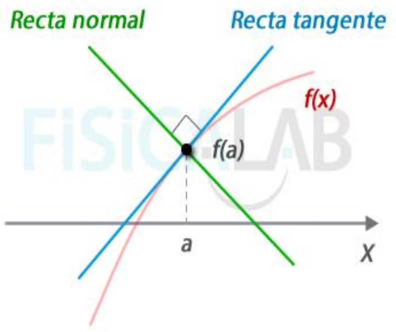
RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A LA CURVA EN UN PUNTO

Una recta se dice que es **tangente** a una función en un punto cuando pasa por ese punto y su pendiente es *f'(a)*. La **recta normal** a una función en un punto, por su parte, es la que pasa por dicho punto y tiene pendiente *-1/f'(a)*.



En azul, la recta tangente a la función *f(x)* (graficada en rojo), en *x=a*. En verde, la recta normal a la función en el mismo punto. Observa que ambas son perpendiculares.

Ya sabes que una recta queda definida cuando conocemos dos puntos por los que pasa, pero también cuando conocemos un punto por el que pasa y la pendiente de la misma. En este caso, el punto, común a ambas, es *(a, f(a))*. Para el cálculo de las pendientes (*f'(a)* y *-1/f'(a)* respectivamente) se hace imprescindible conocer el valor de la derivada de la función en el punto.

Se define la **recta tangente** a una función en un punto de abscisa *x=a* como aquella recta que pasa por *(a, f(a))* y tiene por pendiente la derivada de la función en el punto, *f'(a)*.
Su **expresión** es:

$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

Demostración

Sabemos que la ecuación de una recta viene dada por *y=m·x+b*, siendo:

- *m* la pendiente de la misma.
- *b* es la ordenada en el origen, es decir, donde la recta corta al eje *y.*

Por tanto, para determinar la ecuación de la recta tangente debemos calcular *m* y *b*. Por la definición de recta tangente que hemos dado sabemos que:

1. La pendiente de la recta tangente en *x=a* coincide con el valor de la derivada en *x=a*, con lo que *m=f'(a)*
2. La recta *'toca'* a la función en el punto, es decir, pasa por *(a, f(a))*. Sustituyendo en la ecuación genérica de la recta *x* por *a*, e *y* por *f(a)*, nos queda *f(a)=m·a + b*

Sustituyendo la ecuación de 1 en 2, obtenemos:

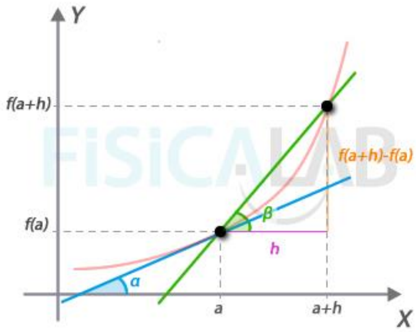
f(a)=m·a + b ⇒ f(a)=f'(a)·a + b⇒ b=f(a)−f'(a)·a

Ya tenemos por tanto, los valores de *m* y *b* que buscábamos. Sustituyendo y reagrupando obtenemos la expresión buscada:

y=f'(a)·x+ f(a)−f'(a)·a ⇒ y−f(a)=f'(a)·(x−a)

Relación con la secante

Una manera alternativa de definir la recta tangente es considerarla como la **recta secante** que pasa por dos puntos *infinitamente próximos* de la función.



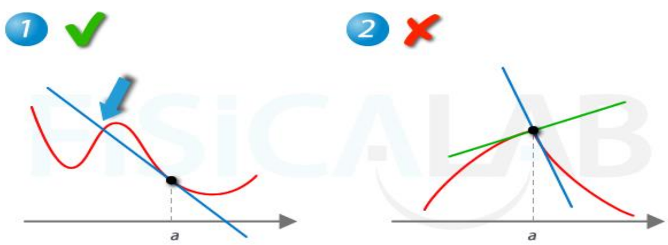
Rectas secante y recta tangente

En verde, la recta secante a la función en dos puntos de abscisas *a* y *a+h*. Observa que la pendiente de dicha recta viene determinada por la razón trigonométrica tangente del ángulo *β* que forma la recta con la horizontal.
Efectivamente, msecante=tan(β)=[f(a+h)−f(a)^]/h. Cuando aproximamos *a+h* a *a* obtenemos la recta secante, en azul.

En este caso, su pendiente será m (tangente)=tan(α)=$\lim\limits_{h \to o} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

En ocasiones se define la **recta tangente** como aquella que corta a la función en un único punto. Aunque es una definición muy intuitiva, estrictamente hablando se trata de una **definición errónea**.

Efectivamente, observa las siguientes gráficas:



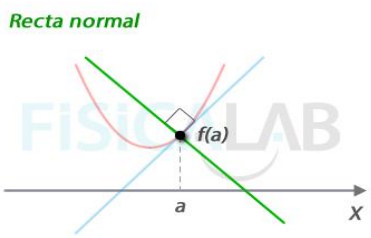
Definiciones erróneas de recta tangente

La recta azul, en 1, cumple la definición que dábamos a comienzos del apartado de recta tangente, es decir, pasa por el punto *(a, f(a))* y su pendiente es *f'(a)*, con lo que se trata de una recta tangente, *a pesar de que toca a la función en más de un punto*. Por otro lado, en 2, existen dos rectas que tocan la función en un único punto, la verde y la azul. Sin embargo, ninguna de ellas es la recta tangente porque se trata de un punto anguloso y no existe *f'(a)*.

Expresión de la recta normal

Se define la **recta normal** a una función en un punto de abscisa *x=a* como aquella recta que es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Por tanto, pasa por *(a, f(a))* y tiene por pendiente *-1/f'(a)*. Su **expresión** es:

$y-f(a)=[-1/f'(a)]\cdot(x-a)$



Rectas normal

En verde, la recta normal a la función, representada en rojo claro, en *(a , f(a))*. Se trata de una recta perpendicular a la recta tangente, representada en azul claro.

Demostración

Siguiendo un procedimiento análogo al de la recta tangente tenemos:

1. La pendiente de la recta normal en *x=a* es *m=-1/f'(a)*
2. La recta *'toca'* a la función en el punto, es decir, pasa por *(a, f(a))*. Sustituyendo en la ecuación genérica de la recta *x* por *a*, e *y* por *f(a)*, nos queda *f(a)=m·a+b*

Sustituyendo la ecuación de 1 en 2, obtenemos:

$y=-1f'(a)\cdot x+f(a)-f'(a)\cdot a\Rightarrow y-f(a)=[-1/f'(a)]\cdot(x-a)$

Recuerda que si dos rectas son perpendiculares, se cumple que el producto de sus pendientes vale -1:

$m1\perp m2\Rightarrow m1\cdot m2=-1$

Donde:

- m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas consideradas.

En conclusión, las fórmulas que utilizaremos para calcular estas rectas son las siguientes:

Ecuación recta TANGENTE

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ecuación recta NORMAL

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

<u>Cómo calcular la recta tangente a una curva en un punto</u>

Para calcular la ecuación de la recta tangente, utilizaremos la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

Por lo que necesitamos saber las coordenadas de un punto P que pase por la recta, que será el punto donde la recta es tangente a la curva y además, la pendiente de esa recta:

$P(x_0, y_0)$ $\qquad\qquad\qquad$ m

Para calcular las coordenadas del punto donde la recta es tangente, si nos dan la coordenada x del punto, sólo tenemos que sustituir la x por la coordenada en la función y obtendremos la coordenada «y», ya que la coordenada y coincide con el valor de la función para ese valor de x.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente a un punto de una función coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$m = f'(x_0)$$

Por lo que derivando la función de la curva y sustituyendo por el valor de x del punto donde es tangente la curva, obtendremos el valor de la pendiente m.

Si conocemos la pendiente m, pero no conocemos las coordenadas del punto donde la recta es tangente a la curva, se puede despejar la x a partir de la fórmula anterior.

Otras veces nos piden que la recta tangente debes ser paralela a otra recta dada. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, por lo que a partir de la recta dada, podemos obtener la pendiente.

Ejemplo 1: Hallar la ecuación de la recta tangente a la siguiente curva en el punto x= -1: $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 3x + 5}$.

Como he comentado antes, para el cálculo de la ecuación de la recta tangente, utilizaremos la ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=m.(x-x_0)$$

Necesitamos obtener las coordenadas del punto P, que será el punto donde la recta es tangente a la curva y la pendiente de la recta tangente:

$$P(x_0,y_0) \qquad\qquad m$$

Vamos a calcular las coordenadas del punto P. Ya tenemos la coordenada x, ya que nos la da el enunciado. Para calcular la coordenada «y» sólo tenemos que sustituir la x por -1 en la función y operar:

$$f(-1)=(-1)^4-3(-1)^2+5=$$

$$=1-3.1+5=3$$

La coordenada «y» es y=3.

Por tanto, las coordenadas del punto P, donde la recta es tangente, es:

$$P(-1,3)$$

Ahora vamos a calcular la pendiente de la recta tangente, que será igual a la derivada de la función en el punto P, es decir, cuando x=-1:

$$m=f'(x_0)=f'(-1)$$

Por tanto, calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=4x^3-6x$$

Si necesitas aprender a derivar o reforzar conceptos, te recomiendo el **Curso de Derivadas**, en el que aprenderás a derivar, paso a paso, desde el principio.

Obtenemos el valor de la derivada de la función para x=-1:

$$f'(-1)=4.(-1)^3-6.(-1)=$$

$$=4.(-1)+6=-4+6=2$$

La pendiente de la recta es igual a 2.

Ya tenemos lo que necesitamos para calcular la ecuación de la recta:

$$m=2 \qquad\qquad P(-1,3)$$

Por tanto, en la ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=m.(x-x_0)$$

Sustituimos las coordenadas del punto y la pendiente por sus valores:

$$y-3=2.(x-(-1))$$

Y operamos:

$$y-3=2.(x+1)$$

$$y-3=2x+2$$

$$y=2x+5$$

Llegando a la ecuación de la recta tangente que estábamos buscando.

Vamos con otro ejercicio un poco diferente.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-x-2$ **, para que dicha tangente sea paralela a la recta de ecuación:** $y+3x+7=0$

En este caso no sabemos ninguna coordenada del punto donde la recta es tangente a la curva, pero nos dan el dato de que debe ser paralela a otra recta, por lo que indirectamente nos están dando la pendiente.

Igual que antes, la ecuación de la recta tangente la obtendremos a partir de la ecuación punto-pendiente:

$$y-y_0=m.(x-x_0)$$

Por lo que necesitamos saber las coordenadas del punto y la pendiente:

$P(x_0,y_0)$ $\qquad\qquad m$

La pendiente la obtenemos a partir de la recta que nos da el enunciado. Vamos a calcular la pendiente de esa recta. Para ello despejamos la «y» y el número que quede delante de la x, será la pendiente:

$$y=-3x-7$$

La pendiente de la recta que nos da el enunciado es -3, y como nos dice que es paralela a la recta tangente, la pendiente de la recta tangente también es -3:

$$m=-3$$

Ahora vamos a calcular las coordenadas del punto P.

Sabemos que la pendiente en cualquier punto de la curva es igual al valor de la derivada en ese punto:

$$m=f'(x_0)$$

Como ya sabemos la pendiente, sólo nos queda calcular la pendiente y obtendremos la coordenada x que cumple que la pendiente de la recta tangente a ese punto sea -3

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x)=2x-1$$

La derivada de la función en un punto cualquiera será:

$$f'(x_0)=2x_0-1$$

La igualamos al valor de la pendiente:

$$2x_0-1=-3$$

Y nos queda una ecuación de primer grado, de la que tenemos que despejar X0, que es la coordenada x del punto que estamos buscando:

$$2x_0=-2$$

$$x_0=-1$$

Para calcular la coordenada «y», obtenemos el valor de la función para x=-1, por lo que sustituimos la x por -1 en la función y operamos:

$$f(-1)=(-1)^2-(-1)-2=$$

$$=1+1-2=0$$

El valor de la función en x=-1 es 0, por lo que la coordenada y=0.

Ya tenemos las coordenadas del punto y el valor de la pendiente:

$$P(-1,0) \qquad m=-3$$

En la ecuación punto pendiente:

$$y-y_0=m.(x-x_0)$$

Sustituimos la pendiente y las coordenadas del punto por sus valores:

$$y-0=-3.(x-(-1))$$

Operamos: $y=-3.(x+1)$

$$y=-3x-3$$

Y llegamos finalmente a la ecuación de la recta tangente que cumple las condiciones que nos pide el resultado.

Ejemplo 3
Hallar, si existen, las coordenadas «x» e «y» de los puntos sobre la curva definida por la fórmula:

$$f(x)=\frac{5-2x}{x-3}$$

Donde la recta tangente es paralela a la recta «r», cuya ecuación es:

$$-x+4y=4$$

Este ejercicio es muy similar al anterior, solo que los cálculos son algo más complejos. Además no nos están pidiendo la ecuación de la recta, sino las coordenadas de los puntos donde la recta es tangente.

Empezamos calculando la pendiente de la recta que nos da el enunciado. Para ello debemos despejar la y:

$$4y=x+4$$

$$y=\frac{x+4}{4}$$

Separamos la fracción en dos términos y el valor de la pendiente es la fracción que queda delante de la x:

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{4}{4}$$

Como es paralela a la recta tangente que estamos buscando, la pendiente de la recta tangente es la misma:

$$m=\frac{1}{4}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, la pendiente de la recta tangente a un punto de la cura, será igual al valor de la derivada en ese punto:

$$m=f'(x_0)$$

Por lo que a partir de esta igualdad, obtendremos los valores de x para los que la pendiente tiene ese valor.

Vamos a calcular la derivada de la función. En este caso tenemos un cociente dos funciones:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

La derivada de un cociente es igual a la siguiente fórmula:

$$y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aplicamos la fórmula:

$$f'(x)=\frac{(-2).(x-3)-(5-2x).1}{(x-3)^2}$$

Y operamos (mucho cuidado el signo menos que separa ambos términos en el denominador):

$$=\frac{-2x+6-5+2x}{x^2-6x+9}=$$

$$=\frac{1}{x^2-6x+9}$$

La derivada de la función en cualquier punto será:

$$f'(x_0)=\frac{1}{x_0^2-6x_0+9}$$

Igualamos esta derivada a la pendiente calculada anteriormente:

$$\frac{1}{x_0^2-6x_0+9}=\frac{1}{4}$$

Nos queda una ecuación de la que tenemos que despejar X0.

En primer lugar multiplicamos en cruz para eliminar los denominadores:

$$4=x_0^2-6x_0+9$$

Pasamos todos los términos al mismo miembro:

$$x_0^2-6x_0+9-4=0$$

Operamos:

$$x_0^2-6x_0+5=0$$

Hemos llegado a una ecuación de segundo grado completa, que pasamos a resolver:

$$x_0=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.5}}{2.1}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}$$

$$x_{01}=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_{02}=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Obtenemos dos soluciones de x: x1=5 y x2=1

Para obtener la coordenada «y» de para cada valor x, calculamos el valor de la función:

$$f(x)=\frac{5-2x}{x-3}$$

Primero sustituimos la x por 5 y operamos:

$$f(5)=\frac{5-2.5}{5-3}=\frac{5-10}{2}=\frac{-5}{2}$$

El valor de «y» es -5/2, por lo que el primer punto donde la recta es tangente es:

$$A\left(5,-\frac{5}{2}\right)$$

Hacemos lo mismo con x=1

$$f(1)=\frac{5-2.1}{1-3}=\frac{5-2}{-2}=\frac{3}{-2}$$

Por lo que las coordenadas del otro punto son:

$$B\left(1,-\frac{3}{2}\right)$$

En este link se explican los ejemplos mencionados anteriormente:

https://youtu.be/wsl_F1etbx0