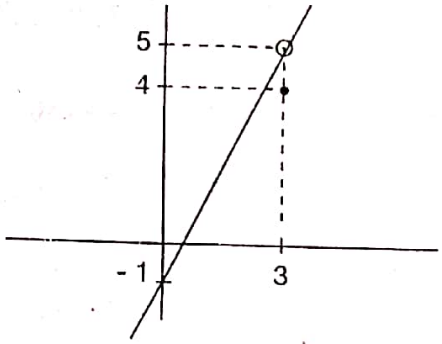
Considerando la función definida como:

$$f_{(x)}\begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$



Esta función aparenta tener un conflicto en $x = 3$, ya que para dicho valor está definida como 4 y no como 5.

Estudiaremos lo que pasa para valores próximos a 3 sin importarnos lo que sucede en 3.

x	2,8	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
y	4,6	4,8	4,98	4 998		5,002	5,02	5,2

Por lo visto, en la tabla, los valores de la función se acercan a 5 a medida que los valores de x se acercan a 3. Para indicar esto se utiliza el símbolo

$$\lim_{x \to 3} f_{(x)} = 5$$

(x tiende a 3)

De aquí que el límite de la función, cuando x tiende a 3, es 5.

Como muestra el ejemplo, el valor de la función en un punto no siempre coincide con el límite de la función cuando la variable tiende a ese punto.

$$f_{(3)} \neq \lim_{x \to 3} f_{(x)}$$

$$4 \neq 5$$

Alumno:	Fecha:	Nota:	Curso:

Si la función fuera $f_{(x)} = 2x - 1$ y se quisiera calcular

$$\lim_{x \to 3} 2x - 1$$

veríamos que:

x	2,8	2,9	3	3,01	3,1
y	4,6	4,8		5,02	5,2

$$\lim_{x \to 3} 2x - 1 = f_{(3)}$$

$$5 = 5$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES

1. Límite de una constante

$$\lim_{x \to a} k = k \qquad \forall\, a \in R$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} 5 = 5$$

2. Límite de la suma y resta de funciones

$$\lim_{x \to a} [f_{(x)} \pm g_{(x)}] = \lim_{x \to a} f_{(x)} \pm \lim_{x \to a} g_{(x)} \qquad \forall\, a \in R$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} [(3x^2 + 4) + (2x - 1)] = \lim_{x \to 2} (3x^2 + 4) + \lim_{x \to 2} (2x - 1)$$

$$= 16 + 3$$

$$= 19$$

3. Límite del producto de funciones

$$\lim_{x \to a} [f_{(x)} . g_{(x)}] = \lim_{x \to a} f_{(x)} . \lim_{x \to a} g_{(x)} \qquad \forall\, a \in R$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to -1} [(-4x^3 + 1) . (x - 2)] = \lim_{x \to -1} (-4x^3 + 1) . \lim_{x \to -1} (x - 2)$$

$$= 5 . (-3)$$

$$= -15$$

4. Límite del cociente entre funciones

$$\lim_{x \to a} [f(x) : g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) : \lim_{x \to a} g(x) \quad \forall a \in R \text{ siempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0 .$$

Ejemplo:

Si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to 2} [(4x^2 + 1) : (x + 1)] = \lim_{x \to 2} (4x^2 + 1) : \lim_{x \to 2} (x + 1)$$

o $$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2 + 1}{x + 1} = 17 : 3$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2 + 1}{x + 1} = \frac{17}{3}$$

Ejemplo:

Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

Si la función dada es $f(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$ y se pretende calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{\lim_{x \to 2} 1}{\lim_{x \to 2} (x - 2)^2} = \frac{1}{0}$$

En este caso el límite del denominador es igual a cero por lo tanto estudiaremos a qué valor tiende de la función cuando la variable tiende a 2.

x	1,8	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
y	2,5	100	10.000	1.000.000		1.000.000	10.000	100

La tabla evidencia que a medida que x tiende a 2 la función tiende a un valor cada vez mayor. Esto se simboliza:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \infty$$

Alumno:	*Fecha:*	*Nota:*	*Curso:*

5. Límite de una función exponencial

$$\lim_{x \to a} f_{(x)}^{g_{(x)}} = \lim_{x \to a} f_{(x)}^{\lim\limits_{x \to a} g_{(x)}} \qquad \forall\, a \in R$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} 3x^{2x} = \lim_{x \to 1} (3x)^{\lim\limits_{x \to 1} (2x)} = 3^2 = 9$$

Ejercicio 5:

Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} (4x - 1) =$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) =$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x - 2) =$

d) $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \log(3x) =$

e) $\lim_{x \to 2} 4^x =$

f) $\lim_{x \to -1} (x - 4)^{2x} =$

g) $\lim_{x \to 2} e^{2x} =$

h) $\lim_{x \to e} e^{\ln x} =$

i) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x + 1} =$

Alumno:	Fecha:	Nota:	Curso:

j) $\lim_{x \to 2} -\frac{5}{x-2} =$

k) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 =$

l) $\lim_{x \to -5} -\left(\frac{3}{x+5}\right)^2 =$

m) $\lim_{x \to -5} \left(\frac{-3}{x+5}\right)^2 =$

INFINITÉSIMOS

Un infinitésimo es una función que, al aplicarle el límite cuando la variable tiende a un valor determinado, tiende a 0.

Ejemplo:

1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ Infinitésimo

2) $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ Infinitésimo

1) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} (2x-3)^2 = 0$ Infinitésimo