

Hola chicos y chicas, les mando un nuevo TP para que vayan leyendo y realizando. El viernes les explico por meet y lo empezamos a resolver. Lean atentamente las dos primeras páginas, para ver si lo entienden. Cualquier duda me consultan por el tablón del classroom.

☆ Casos especiales de Límites

➤ Dos Límites trigonométricos importantes:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Tg}(x)}{x} = 1}$$

EJEMPLO 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{Sen } x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \frac{\text{Sen } x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\text{Sen } x}{x} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Según definición tiende a 1

EJEMPLO 2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Tan } 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \text{Tan } 5x}{5 \cdot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\text{Tan } 5x}{5 \cdot x} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Según definición tiende a 1

➤ Un Límite con la X como índice de una raíz: Indeterminación ∞^0

$$\boxed{\lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt[X]{X} = 1}$$

Nota: Por lo general los límites que tenemos que calcular no están así expresados, sino que tenemos que trabajar algebraicamente las expresiones para llegar a una expresión como la de esta fórmula. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt{(x+2)}^{2x+4}$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt{(x+2)}^{2(x+2)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt{(x+2)}^2 \cdot \sqrt{(x+2)}^{(x+2)} =$$

Primero saco factor común 2 adentro de la raíz

Aplico distributiva de la raíz respecto del producto

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt{(x+2)}^2 \cdot \lim_{X \rightarrow \infty} \sqrt{(x+2)}^{(x+2)} = \lim_{X \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x+2}} \cdot 1 = 2^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Separo el límite en dos (el límite de un producto es igual al producto de los límites)

Este límite por la fórmula que vimos mas arriba, ya sabemos que da 1

Y este es el resultado final del límite.

➤ **Dos Límites exponenciales muy típicos:** Indeterminación 1^∞

$$\boxed{\text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{X}\right)^X = e}$$

$$\boxed{\text{Límite}_{X \rightarrow 0} (1 + X)^{\frac{1}{X}} = e}$$

Nota: Por lo general los límites que tenemos que calcular no están así expresados, sino que tenemos que trabajar algebraicamente las expresiones para llegar a una expresión como la de estas fórmulas.

Los "trucos" típicos para trabajar estas expresiones son los que se denominan operaciones neutras, que son en realidad operaciones que no alteran el resultado. Algunas de estas son por ejemplo:

- Expresar los numeradores como denominadores y viceversa (Invirtiendo las fracciones)
- Multiplicar y Dividir por las mismas expresiones tanto al numerador como al denominador.
- Restar y sumar "1" o la expresión que sea conveniente.

Ejemplo: Calcular $\text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{X+1}\right)^{3X+5}$

$$\text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{X+1}{2}}\right)^{3X+5} = \text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)/2}{(X+1)/2} \cdot (3X+5)}$$

Si está multiplicando al numerador, es como si estuviera dividiendo al denominador

Multiplico y divido por lo mismo para que me quede una potencia igual a lo que tengo dentro del paréntesis

$$\text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2 \cdot \frac{(3X+5)}{(X+1)/2}} = \text{Límite}_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2 \cdot \frac{(3X+5) \cdot 2}{(X+1)}}$$

Agrupo el exponente de otra manera

El 2 que estaba dividiendo en el denominador, lo escribo multiplicando en el numerador

$$\text{Límite}_{(X+1)/2 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{(X+1)/2 \cdot \frac{6X+10}{X+1}} = \text{Límite}_{(X+1)/2 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2} \cdot \left(\frac{6X}{X+X} + \frac{10}{X+X}\right)}$$

Si X tiende a infinito, (X+1)/2 también tiende a infinito, ya que infinito mas uno dividido dos es infinito

Y acá en el exponente resolvemos como si fuera uno de esos límites de infinito sobre infinito, o sea, dividimos todo por X

$$\Rightarrow \text{Límite}_{(X+1)/2 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2} \cdot 6} \Rightarrow \text{Límite}_{(X+1)/2 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(X+1)/2}\right)^{\frac{(X+1)}{2} \cdot 6} \Rightarrow e^6$$

Ya casi está. Esta expresión es similar a la fórmula que pusimos arriba, por lo tanto la expresión es igual a e

Como queda todo elevado a la 6, el límite es igual a e^6

RESOLVER LOS SIGUIENTES LÍMITES INDETERMINADOS:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 2x}{3x} =$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 3x}{\text{Sen } 4x} =$ | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x}{x \cdot \text{Cos } x} =$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Tan } 3x}{x} =$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \text{Tan } x}{2x} =$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 5x}{\text{Tan } 2x} =$ |

Hallar los límites:

24) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^{x+1} \sqrt{x+1} =$ 26) Límite $\lim_{x \rightarrow x} 2^{2x-1} \sqrt{4x-2} =$ 28) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^x \sqrt{x^3} =$ 30) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^x \sqrt{2^x x^2} =$

25) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^{x+1} \sqrt{2x+2} =$ 27) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^{x-1} \sqrt{x^2-1} =$ 29) Límite $\lim_{x \rightarrow x} 3^{3x+1} \sqrt{2x-6} =$ 31) Límite $\lim_{x \rightarrow x} x^x \sqrt{3^x \cdot 2x} =$

Hallar los siguientes límites exponenciales

32) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} =$ 37) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \ln \left(\frac{x+5}{x}\right)^x =$ 42) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x+1}{2x+1}\right)^{\frac{3}{2x}} =$

33) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+1} =$ 38) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} =$ 43) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{11x+1}{4x+1}\right)^{\frac{5}{7x}} =$

34) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x =$ 39) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}} =$ 44) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(2 + \frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{4x}} =$

35) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^x =$ 40) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} =$ 45) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(3 - \frac{x+4}{5x+2}\right)^{\frac{2}{3x}} =$

36) Límite $\lim_{x \rightarrow x} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2} =$ 41) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{4x}} =$ 46) Límite $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(2x+5 + \frac{x+4}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}} =$