- **Concepto de Función Primitiva**: Dada una función cualquiera $f(x)$ definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, se llama *función primitiva* de $f(x)$ a otra función $F(x)$ cuya derivada sea $f(x)$ en dicho intervalo. Es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo x de $[a,b]$.

Por Ejemplo: F(x) = *Sen(x)* es una primitiva de f(x) = C*os (x)*
Ya que *(sen x)' = cos x.*

Otro Ejemplo: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de f(x) = X

Ya que $$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$$

- **Propiedad elemental de las funciones primitivas:**

> Si ***F(x)*** es una primitiva de ***f(x)*** y ***C*** una constante cualquiera (un número), la función ***F(x) + C*** es otra primitiva de ***f(x)***.

Esto pasa porque la derivada de una constante C cualquiera es cero y porque la suma de las derivadas es la derivada de la suma...

De esta propiedad se deduce que una función f(x) que tiene una primitiva F(x), tiene infinitas primitivas dadas por F(x) + C (Para cualquier "C" perteneciente al conjunto de los números reales)

Habíamos dicho que si *f(x)* = Cos (x) Entonces: *F(x)* = Sen (x) es primitiva de *f(x)*

Ahora con esta propiedad podemos decir que *F(x)* = Sen (x) + 1 también es primitiva de *f(x)*
O bien que *F(x)* = Sen (x) − 2 también es primitiva de *f(x)*

Ya que $\Rightarrow$ *La derivada de F(x)= Sen(x) + 1 es f(x)=Cos(x)*
La derivada de F(x)= Sen(x) − 2 es f(x)=Cos(x)

Ambas son primitivas de f(x) = Cos(x)

Y así vemos que f(x) = Cos (x) tiene infinitas funciones primitivas dadas por F(x) = Sen (x) + C
Con C perteneciente al conjunto de los números reales.

★ **Tabla de Integrales Directas:**

La siguiente tabla, es una guía para encontrar las funciones primitivas más comunes

1. $\int f'(x)\,.\,dx = f(x) + C \;\wedge\; \int dx = x + C$

2. $\int x^m\,.\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \Leftrightarrow m \neq -1$

3. $\int \frac{1}{x}\,.\,dx = \ln|x| + C$

4. $\int a^x\,.\,dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C \Leftrightarrow a > 0 \;\wedge\; a \neq 1$

5. $\int e^x\,.\,dx = e^x + C$

6. $\int Sen(x)\,.\,dx = -Cos(x) + C$

7. $\int Cos(x)\,.\,dx = Sen(x) + C$

8. $\int Tg(x)\,.\,dx = -\ln|Cos(x)| + C$

9. $\int Cotg(x)\,.\,dx = \ln|Sen(x)| + C$

10. $\int \frac{1}{Cos^2(x)}\,.\,dx = Tg(x) + C$

11. $\int \frac{1}{Sen^2(x)}\,.\,dx = -Cotg(x) + C$

12. $\int Sec(x) \cdot Tg(x)\,.\,dx = Sec(x) + C$

13. $\int Cosec(x) \cdot Cotg(x)\,.\,dx = -Cosec(x) + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ArcSen(x) + C = -ArcCos(x) + C$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = ArcTg(x) + C = -ArcCotg(x) + C$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ArcSec(x) + C =$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C =$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C =$

19. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C =$

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

Se llama *Integral Indefinida* de una función *f(x)*, al conjunto de todas las primitivas de la función *f(x)*, y se simboliza

$$\int f(x)\ .\ dx$$

Por lo tanto, si F(x) es primitiva de f(x), entonces: $\int f(x)\ .\ dx = F(x) + C$

__Ejemplo__: Calculemos la integral de f(x) = $\frac{1}{x}$

Como sabemos que la derivada de F(x) = ln (x) vale 1/x:

$$\int f(x)\ .\ dx = \int \frac{1}{x}\ .\ dx = \ln(x) + C$$

Propiedades Importantes de las Integrales:

La Integral de una suma o resta de funciones, es respectivamente la suma o resta de las integrales de las funciones:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

La Integral de una Constante por una función, es igual a la Constante por la integral de la función:

$$\int k.\ f(x)\ dx = k.\int f(x)\ dx$$

Y la integral directa más sencilla de todas: $\int k.\ dx = k.x + C$

<u>Ejemplo</u>: Vamos a calcular la siguiente integral: $\int (5X+3-e^x).\,dx$

En primer lugar la descomponemos en la suma/resta de integrales

$$\int (5X+3-e^x).\,dx = \int 5X.\,dx + \int 3.\,dx - \int e^x.\,dx$$

Saco las constantes afuera

$$\int (5X+3-e^x).\,dx = 5.\boxed{\int X.\,dx} + 3\cdot\boxed{\int dx} - \boxed{\int e^x}\,dx$$

<u>Integro usando la tabla:</u>

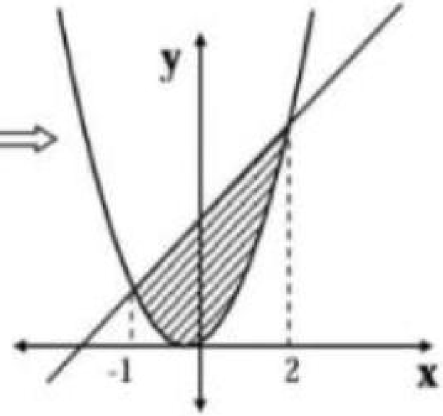
$$\int (5X+3-e^x).\,dx = 5.\boxed{\frac{X^2}{2}} + 3\boxed{X} - \boxed{e^x} + C$$

$$\boxed{\int (5X+3-e^x).\,dx = 5.\frac{X^2}{2} + 3X - e^x + C}$$

★ **Área Entre curvas:** Para calcular el área entre dos curvas, restamos el área de las curvas. Y como límites de integración, usamos las intersecciones entre las curvas.

Ejemplo: Calcular el área entre las curvas $f(x) = X^2$ y $g(x) = X + 2$

Como no me dicen los límites de integración, vamos a tener que calcularlos, para eso, calculamos las intersecciones entre las funciones: ⟹



$$X^2 = X + 2 \Rightarrow X^2 - X - 2 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ y } 2$$

Entonces calculamos la resta de las áreas de las funciones entre -1 y 2

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (X+2).dx - \int_{-1}^{2} X^2.dx = \int_{-1}^{2} X.dx + \int_{-1}^{2} 2.dx - \int_{-1}^{2} X^2.dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{X^2}{2}\right]_{-1}^{2} + 2.[X]_{-1}^{2} - \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + 2.[2-(-1)] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$\text{Área} = \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] + 2.[3] - \left[\frac{8}{3} - \frac{-1}{3}\right] = \frac{3}{2} + 6 - 3 = \boxed{\frac{9}{2}}$$

- Nota 1: Si restamos al revés las funciones, o si calculamos un área que está por debajo del eje X, nos da un valor negativo, pero correcto, ya que lo que nos interesa es el valor absoluto del área.

- Nota 2: Si queremos calcular el área de una curva entre "a" y "b" y la curva corta al eje X entre esos valores, tenemos que partir la integral en 2 partes, desde "a" hasta la raíz y desde la raíz hasta "b", ya que la parte que está debajo del eje X va a dar negativa y la tenemos que sumar, si no partimos la integral, cuando calculamos el toda entera, queda restada la parte que está debajo del eje X en vez de sumada y el valor final del área sería incorrecto.

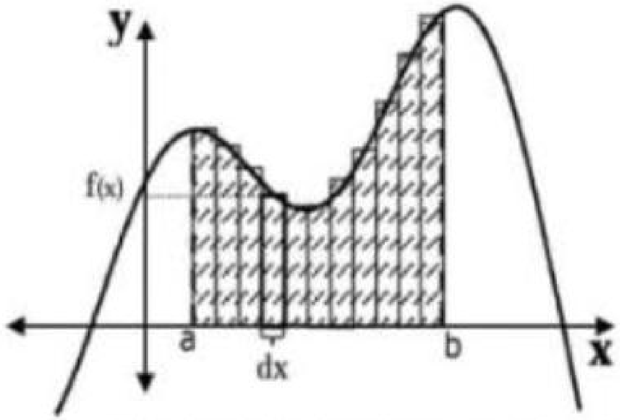
INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN

Regla de Barrow

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $F(x)$ una función definida en $[a,b]$, derivable y primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x).\,dx = F(b) - F(a)$$

★ *Aplicación de la integral definida: La integral definida entre "a" y "b" de una función, representa al **área entre la curva** y el eje x, de la función integrada, entre los valores "a" y "b"*



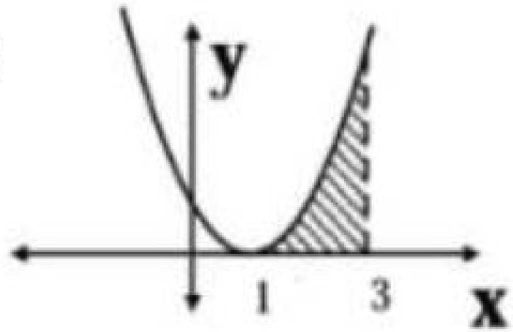
En realidad, la integral es una sumatoria de infinitos f(x).dx, a medida que dx se hace mas chico, la cantidad de términos de la sumatoria es mas grande, y cuando el dx es infinitamente pequeño, la cantidad de términos de la sumatoria, es infinita, y sería como sumar las áreas de los rectángulos, que a medida que dx es cada vez mas chico, esa área es cada vez mas parecida al área real debajo de la curva.

Dx es un diferencial, lo que significa que es un valor infinitamente pequeño, tendiendo a cero, en el gráfico lo dibujamos con un valor considerable, como para que se entienda el concepto de las áreas, pero tengan en cuenta que en realidad dx es casi 0.

Otra propiedad importante para integrales definidas:

$$\int_a^b -f(x).\,dx = \int_b^a f(x).\,dx \quad \text{O Bien} \quad \int_a^b f(x).\,dx = -\int_b^a f(x).\,dx$$

Veamos un ejemplo de cálculo de áreas mediante integrales:
Calcular el área debajo de la curva $f(x) = (X-1)^2$ entre $X=1$ y $X=3$



Desarrollamos el cuadrado del binomio

$$\text{Área} = \int_1^3 \left(X^2 - 2X + 1\right).\, dx$$

Descomponemos la integral

$$\text{Área} = \int_1^3 X^2 .\, dx \quad - \quad \int_1^3 2X .\, dx \quad + \quad \int_1^3 1.\, dx$$

Integramos

$$\text{Área} = \left[\frac{X^3}{3}\right]_1^3 - 2.\left[\frac{X^2}{2}\right]_1^3 + \left[X\right]_1^3$$

Reemplazamos X por los límites de integración (Regla de Barrow)

$$\text{Área} = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - 2.\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + (3-1)$$

$$\text{Área} = \left(9 - \frac{1}{3}\right) - 2.\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + (2) = \frac{26}{3} - 8 + 2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

- Resolver las siguientes Integrales Indefinidas:

1) $\int \frac{1}{x} . dx =$

2) $\int Sen(x) . dx =$

3) $\int [Cos(x) + 2] . dx =$

4) $\int \left[x + e^x \right] . dx =$

5) $\int [2x - 1] . dx =$

6) $\int \left[3x^2 - 4x + 5 \right] . dx =$

7) $\int \left[-6x^2 + 6x - 1 \right] . dx =$

8) $\int \left[-e^x + e \right] . dx =$

9) $\int \left(\frac{1}{Cos^2(x)} + \frac{1}{Sen^2(x)} \right) dx =$

10) $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - X^2}} =$

11) $\int \frac{5\, dx}{1 + X^2} =$

12) $\int (Sen(x) + Cos(x)) dx =$