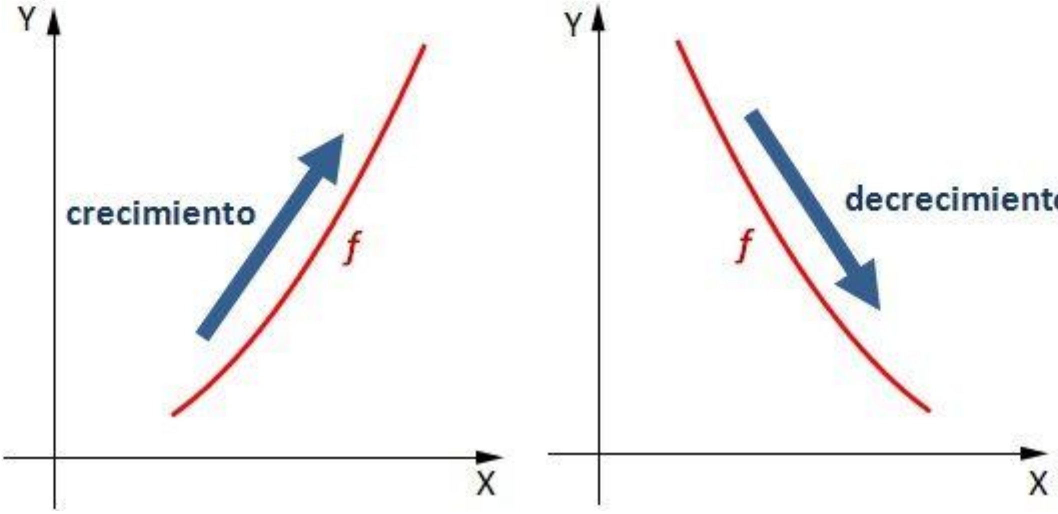
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

El **crecimiento y decrecimiento** de una función f se puede estudiar en un intervalo $[a,b]$, en un punto x o en todo el dominio.

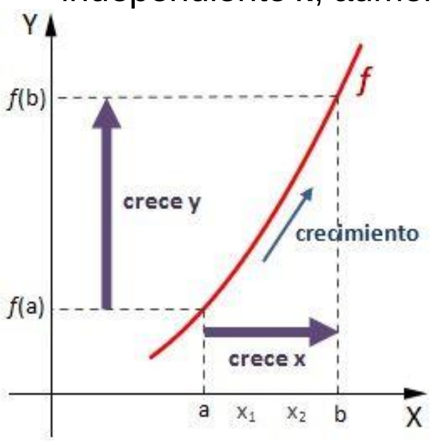
La **tasa de variación** indica cómo cambia una función al pasar de un punto a otro. Esta tasa examina si la función crece o decrece en una región.



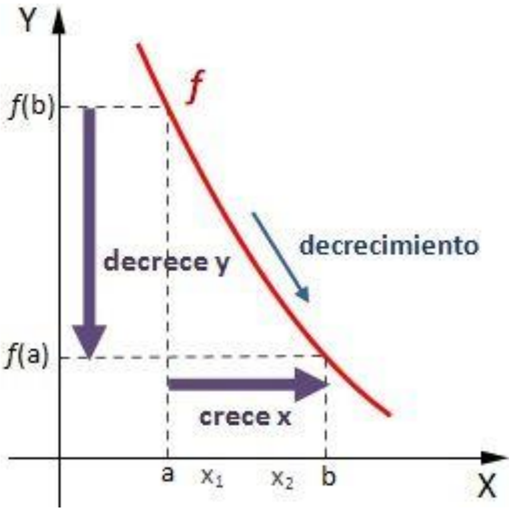
Crecimiento y decrecimiento en un intervalo

Sean a y b dos elementos del dominio, tales que $a < b$ y formando el intervalo $[a,b]$.

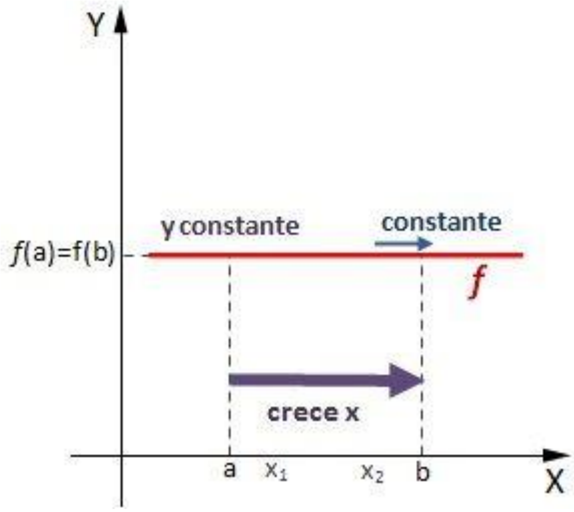
- Una función es **creciente** entre a y b si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Es decir, es creciente en $[a,b]$ si al aumentar la variable independiente x, aumenta la variable dependiente y.



Una función es **decreciente** entre *a* y *b* si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Es decir, es decreciente en [*a*,*b*] si al aumentar la variable independiente *x*, disminuye la variable dependiente *y*.



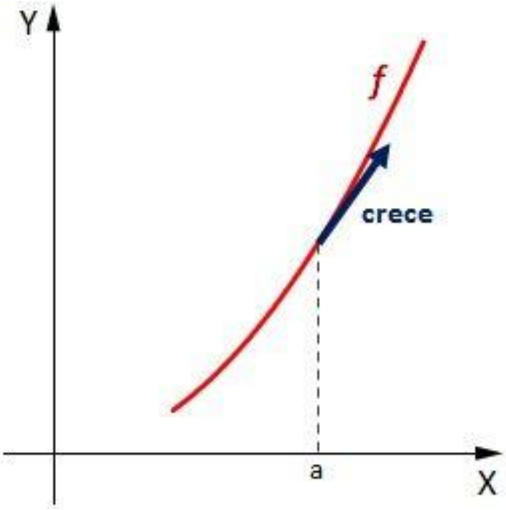
Una función es **constante** entre *a* y *b* si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$. Es decir, es constante en [*a*,*b*] si al aumentar la variable independiente *x*, la variable dependiente *y* no varia.



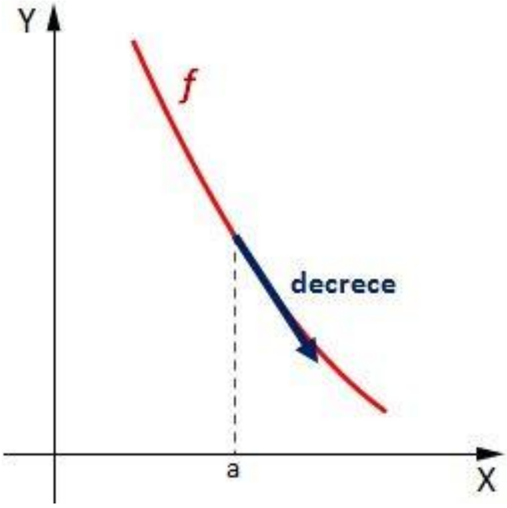
Crecimiento y decrecimiento en un punto

En una función *f* derivable en el punto *a*.

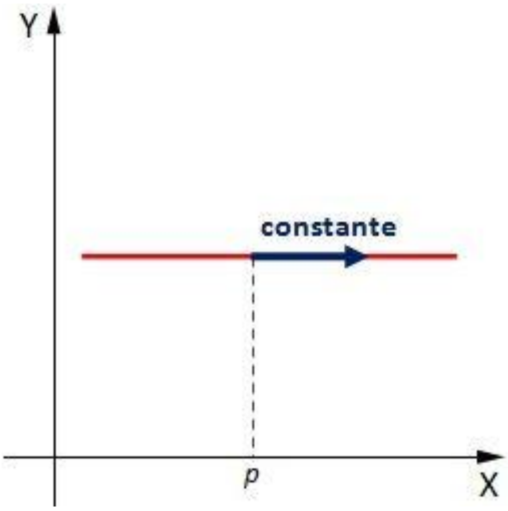
- La función *f* es **creciente** en *a* si $f'(a) > 0$. Es decir, es creciente en *a* si la derivada es positiva.



La función *f* es **decreciente** en *a* si $f'(a) < 0$. Es decir, es decreciente en *a* si la derivada es negativa.



La función *f* es **constante** en *a* si $f'(a) = 0$ y además es la derivada es nula en los puntos muy próximos a *a*. Es decir, es constante si la derivada es nula en *a* y en un entorno de *a*.



En este caso, se exige que la derivada sea nula también en la proximidad de *a* ya que o sino sería un máximo o mínimo.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** explican los trozos del dominio en los que la función crece o decrece.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento se realizará el siguiente procedimiento.

1. **Derivar** la función, obteniendo $f'(x)$.
2. Hallar las **raíces** de la derivada, es decir, los x tales que la derivada sea 0.
$$f'(x) = 0$$
3. Crear **intervalos abiertos** con extremos las raíces de f'.

   Por ejemplo, si una función está definida en todos los números reales (es decir, en $(-\infty,+\infty)$) y tiene como raíces el 1 y el 3, entonces los intervalos a estudiar serían $(-\infty,1)$, $(1,3)$ y $(3,+\infty)$.
4. Estudiar el **signo** que toma la derivada en un valor interior de cada **intervalo**, de manera que:
$$\text{Si } f'(x) > 0 \qquad \text{, f es creciente}$$
$$\text{Si } f'(x) < 0 \qquad \text{, f es decreciente}$$
   Por ejemplo, si $f'(2) < 0$, que es un punto interior de $(1,3)$, entonces la función es decreciente en dicho intervalo.
5. A partir del paso anterior, obtenemos todos los **intervalos de crecimiento y decrecimiento**.

Crecimiento y decrecimiento en todo el dominio

- Una función f es **creciente** en todo su dominio si es creciente en todos sus puntos. Es decir, si para todo punto a, $f'(a) \geq 0$.
- Una función f es **decreciente** en todo su dominio si es decreciente en todos sus puntos. Es decir, si para todo punto a, $f'(a) \leq 0$.
- Una función f es **constante** en todo su dominio si es constante en todos sus puntos. Es decir, si para todo punto a, $f'(a) = 0$.

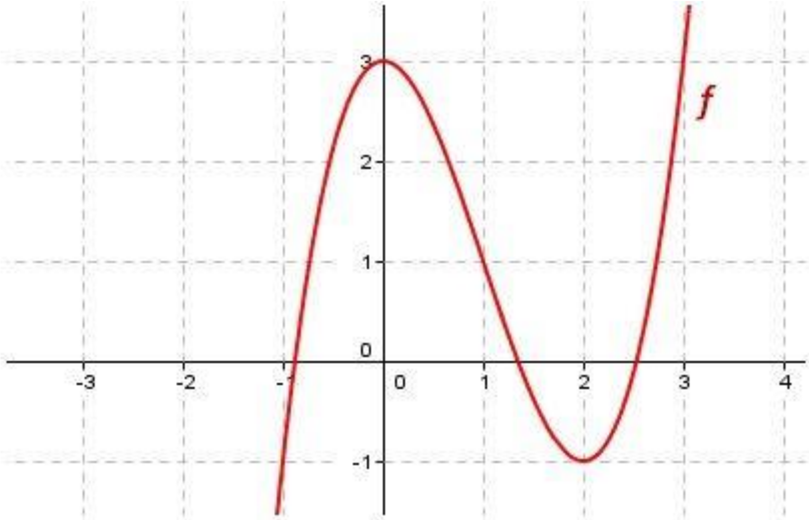
  En estos casos se trata de **funciones monótonas**.

Ejemplo de intervalos de crecimiento y decrecimiento

Sea la función *f* definida en los número reales (intervalo (-∞,+∞)):

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

Vamos a estudiar los **intervalos** de **crecimiento y decrecimiento** que tiene.



1. **Derivamos** la función, obteniendo *f '*(*x*).

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

2. Hallamos las **raíces** de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3x(x-2)$$

$$\text{Raíces:} \qquad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2$$

3. Los **intervalos abiertos** con extremos las raíces de *f '* serán:

$$(-\infty, 0) \quad , \quad (0,2) \quad \text{y} \quad (2, +\infty)$$

4. Estudiamos el **signo** que toma la derivada en los valores interiores de cada **intervalo**, por ejemplo en el -1, el 1 y el 3:

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 \cdot 1 + 6 = 9 > 0$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$$

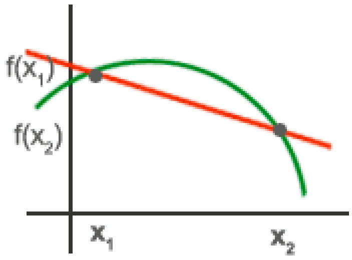
$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$$

5. Hallamos que:
   - *f* es **creciente** en (-∞,0) y en (2,+∞).
   - *f* es **decreciente** en (0,2).

Concavidad y convexidad de una función

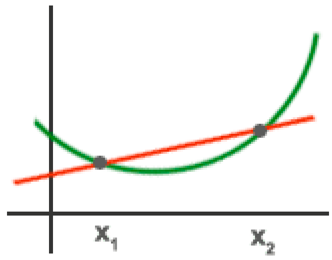
Una función es cóncava en un intervalo de su dominio cuando:

Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo $x1$ y $x2$, el segmento que une los puntos $(x1, f(x1))$ y $(x2, f(x2))$ siempre queda por debajo de la gráfica.



Una función es convexa en un intervalo de su dominio cuando:

Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo $x1$ y $x2$, el segmento que une los puntos $(x1, f(x1))$ y $(x2, f(x2))$ siempre queda por encima de la gráfica.



Intervalos de concavidad y convexidad

Para calcular los intervalos la concavidad y convexidad de una función seguiremos los siguientes pasos:

1 Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

2 Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).

3 Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si $f''(x) < 0$ es cóncava.

Si $f''(x) > 0$ es convexa.

4 Escribimos los intervalos.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Calculamos el dominio

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} x & (-\infty, 0) & (0,1) & (1,\infty) \\ f''(x) & - & + & + \\ & \cap & \cup & \cup \end{array}$$

Convexa: $(0,1) \cup (1,\infty)$

Cóncava: $(-\infty, 0)$