Matemàtica Clase 10 Potencia y Raíz

La **potenciación** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

exponente
base

$$a^n = \underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \ldots a}_{n \text{ veces}}$$

$$a^0 = 1 \ (\text{con } a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

$$2^3 = 2 \, . \, 2 \, . \, 2 = 8 \qquad 3^4 = 3 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 3 = 81$$

El signo de la potencia depende del signo de la base y del exponente.

- Si la **base** es **positiva**, la **potencia** siempre es **positiva**.

$$3^5 = 243$$

- Si la **base** es **negativa** y el **exponente** es **par**, la **potencia** es **positiva**.

$$(-3)^2 = (-3) \, . \, (-3) = 9$$

- Si la **base** es **negativa** y el **exponente** es **impar**, la **potencia** es **negativa**.

$$(-3)^3 = (-3) \, . \, (-3) \, . \, (-3) = -27$$

La **potenciación** cumple con las siguientes **propiedades**:

Propiedades	Ejemplos	En símbolos
El **producto de potencias de igual base** es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.	$2^3 \, . \, 2^2 = 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2$ $= 2^{3+2} = 2^5$ $= 32$	$a^m \, . \, a^n = a^{m+n}$
El **cociente de potencias de igual** base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la resta de los exponentes dados.	$2^3 : 2^2 = (2 \, . \, 2 \, . \, 2) : (2 \, . \, 2)$ $= 2^{3-2} = 2^1$ $= 2$	$a^p \, . \, a^q = a^{p-q}$
La **potencia de una potencia** es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.	$(2^3)^2 = (2 \, . \, 2 \, . \, 2)^2$ $= 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2$ $= 2^6 = 64$	$(a^r)^s = a^{r \, . \, s}$
La potenciación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y la división.	$(2 \, . \, 5)^2 = 2^2 \, . \, 5^2 = 100$ $(4 : 2)^2 = 4^2 : 2^2 = 4$	$(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$

1- Hallar las soluciones a las siguientes potencias

a. $(-3)^4 = \square$

b. $(-2)^3 = \square$

c. $-6^2 = \square$

d. $(-5)^0 = \square$

e. $(-6)^1 = \square$

f. $(-4)^3 = \square$

g. $-7^0 = \square$

h. $(-9)^2 = \square$

i. $(-10)^2 = \square$

j. $(-1)^3 = \square$

k. $0^4 = \square$

l. $8^2 = \square$

2- Responde

a)Que función cumple el paréntesis en la potencia

b) ¿Como es el signo del resultado de los exponetes pares y los impares?

c) para comprobar tus conclusiones te invito a que encuentres las soluciones a las siguientes potencias de 1

$(-1)^0=$	$(-1)^1=$
$(-1)^2=$	$(-1)^3=$
$(-1)^4=$	$(-1)^5=$
$(-1)^6=$	$(-1)^7=$
$(-1)^8=$	$(-1)^9=$
$(-1)^{10}=$	$(-1)^{11}=$
$(-1)^{12}=$	$(-1)^{13}=$
$(-1)^{14}=$	$(-1)^{15}=$

d) sin hacer cálculos indicar el resultado de

$(-1)^{345}=$ $(-1)^{728}=$

3- Sabiendo que todo número positivo es mayor a cero y que todo número negativo es menor a cero, indicar la relación entre los siguientes valores

a. $(-3)^3$ ☐ 0

b. $(-5)^4$ ☐ 0

c. $(-3)^1$ ☐ 0

d. $(-35)^{17}$ ☐ 0

e. $(-4)^{11}$ ☐ 0

f. $(+16)^{12}$ ☐ 0

4- Completa la tabla según el ejemplo

a	b	a^2	b^2	a^3	b^3	a^0	b^1	$a^2 + b^2$
−1	3	$(-1)^2 = 1$	$3^2 = 9$	$(-1)^3 = -1$	$3^3 = 27$	$(-1)^0 = 1$	$3^1 = 3$	1+9=10
−5	−2							
4	−6							
−2	−3							
−4	−2							

5- Indicar si las siguientes expresiones son iguales o no. Justifique mediante propiedades

a. $(3 \,.\, 2)^2$ ☐ $3^2 \,.\, 2^2$

b. $(-2)^4 \,.\, (-2)^2$ ☐ $(-2)^8$

c. $(-5)^6 : (-5)^3$ ☐ $(-5)^2$

d. $(3^4 \,.\, 2) : 3^2$ ☐ $3^2 \,.\, 2$

e. $(-3 + 2)^3$ ☐ $(-3)^3 + 2^3$

f. $[(-3)^2]^0$ ☐ 1

g. $[(-5)^3]^1$ ☐ $(-5)^4$

h. $4^2 \,.\, 3^2$ ☐ 12^2

6- Expresar como única potencia aplicando propiedades

a. $(-3)^2 \,.\, (-3)^3 : (-3)^4 =$

b. $[(-5)^3]^2 : (-5)^2 =$

c. $[(-1) \,.\, (-2) \,.\, (-3)]^8 : [(-6)^3]^2 =$

d. $(2 \,.\, 3)^6 : (2 \,.\, 3)^4 =$

e. $[(-2) \,.\, (-3) \,.\, (-4)]^2 =$

f. $[(-6)^8 : (-6)^6]^2 =$

g. $[(-1)^3 : (-1)^3]^3 =$

h. $(3^5 \,.\, 4^3)^4 : (3^5 \,.\, 4^4)^3 =$

La **radicación** es una operación entre dos números *a* y *n* llamados radicando e índice, respectivamente.

índice $\sqrt[n]{a} = b$ *radical*

radicando *raíz*

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

- Si el **radicando** es **positivo**, la raíz es **positiva**.

$$\sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{49} = 7$$

- Si el **radicando** es **negativo** y el **índice** es **impar**, la raíz es **negativa**.

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

- Si el **radicando** es **negativo** y el **índice** es **par**, la raíz **no tiene solución** en el conjunto de los números enteros, ya que ningún número entero elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.

$\sqrt{-4}$ y $\sqrt[4]{-16}$ no tienen solución en el conjunto de los números enteros.

Propiedad	Ejemplos	En símbolos
Simplificación de índices	$\sqrt{3^4} = \sqrt[2:2]{3^{4:2}} = 3^2 = 9$	$\sqrt[n]{a^b} = \sqrt[n:b]{a^{b:b}}$ con $b \neq 0$
Amplificación de índices	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3.2]{8^{1.2}} = \sqrt[6]{64} = 2$	$\sqrt[n]{a^b} = \sqrt[n.c]{a^{b.c}}$
Raíz de raíz	$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

La **radicación** es **distributiva** con respecto a la multiplicación y la división.

$$\sqrt[n]{a \,.\, b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

1-Respondan y expliquen las respuestas.

a. Es cierto que $\sqrt{-9}$ no tiene solucion? .Por que?

b. Es verdad que ($\sqrt[4]{9^2}$)2 es igual a 9 ?

c. La radicación ¿es distributiva con respecto a la suma y la resta?

2- Hallar la o las raíces de ser posible, y justifica tu respuesta como en en ejemplo

Ejemplo

$\sqrt{25} = 5$ y -5 por que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$

a. $\sqrt{16} =$

b. $\sqrt[3]{-8} =$

c. $\sqrt[4]{16} =$

d. $\sqrt[5]{1} =$

e. $\sqrt[3]{-216} =$

f. $\sqrt[5]{-32} =$

g. $\sqrt{-36} =$

h. $\sqrt[3]{-27} =$

i. $\sqrt[4]{81} =$

j. $\sqrt[4]{625} =$

k. $\sqrt{100} =$

l. $\sqrt[9]{0} =$

3- Resuelvan aplicando propiedades.

a. $\sqrt{\sqrt{256}} =$

b. $\sqrt{144 \,.\, 25} =$

c. $\sqrt{81 : 9} =$

d. $\sqrt[3]{(-64) : (-1)} =$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{729}} =$

f. $\sqrt[3]{-1\,000 : 125} =$

4- Indiquen verdadero o falso y justifiquen su respuesta

a. $\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = \sqrt[9]{-1}$ ☐

b. $\sqrt[4]{3} \,.\, \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81}$ ☐

c. $\sqrt{49 + 25} = \sqrt{49} + \sqrt{25}$ ☐

d. $\sqrt{4 \,.\, (9 - 5)} = \sqrt{4 \,.\, 9} - \sqrt{4 \,.\, 5}$ ☐

e. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[5]{64}$ ☐

f. $\sqrt[3]{-3} \,.\, \sqrt[3]{-3} \,.\, \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{(-3) \,.\, (-3) \,.\, (-3)}$ ☐

Para resolver un **cálculo combinando todas las operaciones** estudiadas, pueden seguir estos pasos.

$\sqrt{49}\,.\,3 + 24:2 - 5\,.\,2^2 =$ — **1.** Se separa en términos.

$7\,.\,3 + 12 - 5\,.\,4 =$ — **2.** Se resuelven las potencias y raíces.

$21 + 12 - 20 = 13$ — **3.** Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.

4. Se resuelven las sumas y restas.

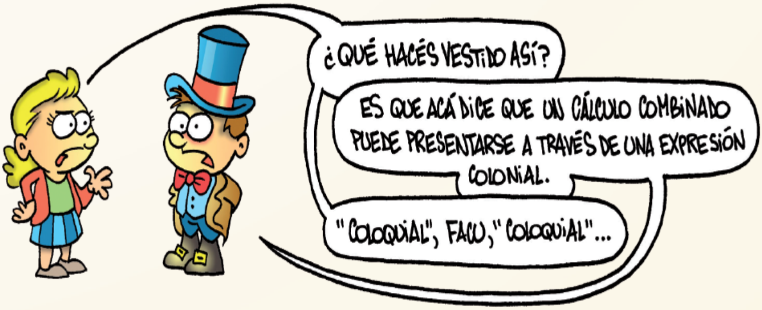
$(-10+2)^2 + \sqrt{16+4\,.\,5} - (-15:3+3)^3 =$ — **1.** Se separa en términos.

$(-8)^2 + \sqrt{16+20} - (-5+3)^3 =$

$64 + \sqrt{36} - (-2)^3 =$ — **2.** Se resuelven las potencias y raíces.

$64 + 6 - (-8) =$

$64 + 6 + 8 = 78$ — **3.** Se resuelven las sumas y restas.



Un cálculo combinado puede presentarse a través de una **expresión coloquial**.

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
La raíz cuadrada de la suma entre 5 y el anterior al opuesto de −5.	$\sqrt{5+(5-1)}$
El cubo de la diferencia entre el opuesto de 14 y el siguiente de −9.	$[-14-(-9+1)]^3$
La suma entre la raíz cúbica del opuesto de 125 y el anterior a −11.	$\sqrt[3]{-125}+(-11-1)$
El cociente entre el cuadrado de −9 y la cuarta parte de 36.	$(-9)^2:(36:4)$

En general en las operaciones combinadas se toman la solución positiva de las raíces cuadradas

1- Resuelve las siguientes operaciones combinadas, de ser necesario aplica propiedades de potencia, y recuerda tomar la solución positiva de la raíz cuadrada

a. $(-2)^3 + \sqrt[3]{-1} - (-4)^3 - \sqrt{144} =$

b. $(-8)^0 + (-4)^2 \,.\, 3 : 6 - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[3]{-8} =$

c. $(-10)^1 + \sqrt{36} - \sqrt[3]{-27} \,.\, \sqrt[5]{-32} =$

d. $(-4)^2 \,.\, (-3)^2 : 8 + \sqrt[6]{64} - \sqrt[3]{-1000} : 2 - 6 \,.\, 2 =$

e. $(-5)^3 - (-12) : 3 \,.\, 4 + \sqrt{10^2 + 2 \,.\, 10^1 + 10^0} =$

f. $\sqrt[4]{(-64) : (-4)} + (-6)^2 : 12 - (1 + 4 \,.\, 3)^2 =$

h. $\sqrt[5]{-30 - 2} + (-6 + 1 + 3)^2 - 0 : 7 =$

i. $3 \,.\, (-2)^3 \,.\, (-4) - 8 : (-2)^2 + \sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{25 \,.\, 5} =$

j. $-5 \,.\, (-1)^0 \,.\, (-2)^2 - 10 : (-5)^1 + \sqrt[4]{-1 + 82} - 4 =$

k. $\sqrt{48 \,.\, 3} + (-150 + 50) : (-8 + 3) + \sqrt{2} \,.\, \sqrt{8} =$

l. $\sqrt{8^2 + 6^2} + (-8)^0 - (-5 + 6 + 1)^3 + \sqrt[3]{-343} =$

m. $\sqrt{9^2 + 12^2} + (-3)^2 - (-1 + 2 + 3)^3 - \sqrt[3]{-125} =$

Para resolver **ecuaciones** en las cuales la **incógnita** está afectada por un **exponente,** se deben tener en cuenta los siguientes casos:

- Si el exponente es **par:** $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ *si* $\boldsymbol{n}$ *es par*

$$x^2 = 16$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$ • Se aplica raíz cuadrada en ambos miembros.
$$|x| = 4$$ • Se aplica la definición $\sqrt[n]{x^n}$ cuando el índice es par.
$$x = 4 \text{ o } x = -4$$ • Se aplica la definición de módulo.

$$x^4 = 81$$
$$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{81}$$ • Se aplica raíz cuarta en ambos miembros.
$$|x| = 3$$ • Se aplica la definición $\sqrt[n]{x^n}$ cuando el índice es par.
$$x = 3 \text{ o } x = -3$$ • Se aplica la definición de módulo.

- Si el exponente es **impar:** $\sqrt[n]{x^n} = x$ *si* $\boldsymbol{n}$ *es impar*

$$x^3 = 27$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$$ • Se aplica raíz cubica en ambos miembros.
$$x = 3$$ • Se aplica la definición $\sqrt[n]{x^n}$.

Las **ecuaciones** en las cuales la **incógnita** está afectada por una **raíz,** se pueden resolver siguiendo estos pasos:

$$\sqrt{x} = 6$$
$$(\sqrt{x})^2 = 6^2$$ • Se eleva al cuadrado en ambos miembros.
$$x = 36$$ • Se simplifican índices con exponentes.

$$\sqrt[3]{x} = 2$$
$$(\sqrt[3]{x})^3 = 2^3$$ • Se eleva al cubo en ambos miembros.
$$x = 8$$ • Se simplifican índices con exponentes.

1- unir con flechas la ecuación con su solución, justifica tu respuesta

a. $x^2 = 1$
b. $\sqrt[3]{x} = -1$
c. $\sqrt{x} = 2$
d. $x^3 = 1$
e. $x^2 = 16$
f. $\sqrt{x} = 1$

- 1
- -1
- 4
- -4

2- Hallar la/ las soluciones a las siguientes ecuaciones

a. $x^2 + 4 = 20$

b. $x^3 - 3 = -30$

c. $\sqrt{x} - 15 = 0$

d. $\sqrt{x - 15} = 0$

e. $x^2 : 3 = 27$

f. $2x^2 = 50$

g. $\sqrt{4x} : (-2) = -7$

h. $x^2 : 4 + 7 = 11$

i. $(x - 4)^3 . 3 = 81$

j. $\sqrt[3]{5x + 4} = 4$

k. $\sqrt[3]{3x} - 7 = 2$

l. $\sqrt[5]{5x - 2} = 3 . 7^0$

m. $\sqrt{64} - x^2 = -17$

n. $3 . \sqrt{x + 5} = 9$

o. $\sqrt[4]{2x - 2} = 2$